Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ?

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1955

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 17

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ?

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

Болтянский Владимир Григорьевич.
Что такое дифференцирование?

Редактор *А. З. Рывкин.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *Ц. С. Варшавская.*

Сдано в набор 1/II 1955 г. Подписано к печати 5/III 1955г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$.
Физ. печ. л. 2. Услови. печ. л. 3,28. Уч.-изд. л. 3,08 Тираж 50000 экз. Т-01739.
Цена книги 90 к. Заказ № 98.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОТ АВТОРА

У школьников старших классов, особенно у интересующихся математикой, физикой, техникой, часто возникает вопрос: что такое «высшая» математика? Иногда подобные вопросы обсуждаются на занятиях школьных математических кружков.

В этой книге автор попытался (в форме, доступной учащимся старших классов) объяснить некоторые понятия высшей математики*), такие, как производная, дифференциальное уравнение, число e, натуральный логарифм (чаще всего школьники узнают о существовании двух последних понятий и интересуются ими). Пояснение этих понятий я пытался сделать возможно более наглядным, опираясь на решение задач, взятых из физики. При этом, помимо наглядности, я руководствовался стремлением показать, что понятия «высшей» математики являются математическим отражением свойств реальных процессов, совершающихся в природе, лишний раз показать, что математика связана с жизнью, а не оторвана от нее, что она развивается, а не является неизменной, завершенной наукой.

Не все доказательства и рассуждения, имеющиеся в книге, проведены с полной математической строгостью. Некоторые рассуждения носят характер наглядных пояснений. Такой метод

*) С некоторыми понятиями высшей математики читатели могут познакомиться по другим книгам этой же серии: А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы (выпуск 9); И. П. Натансон, Суммирование бесконечно малых величин (выпуск 12).

изложения казался мне наиболее подходящим для популярной книги.

Книга может быть использована в работе школьных математических и физических кружков; для ее понимания требуются знания в объеме примерно девяти классов средней школы. Частично материал книги содержался в лекции для школьников, прочитанной автором по просьбе руководителей школьных математических кружков при МГУ.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность А. И. Маркушевичу и А. З. Рывкину за их ценные советы и замечания о тексте рукописи.

ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ ТЕЛА

Постановка задачи

Первая задача, которую мы рассмотрим, заключается в *определении скорости тела, падающего с некоторой высоты на землю.*

Из курса элементарной физики мы знаем, что тело, падающее в пустоте вертикально вниз, имеет через t секунд после начала падения скорость

$$v = v_0 + gt, \tag{1}$$

где v_0 — начальная скорость падения, а g — ускорение силы тяжести.

При падении тел в воздухе (а не в пустоте) формула (1) остается в некоторых случаях приблизительно правильной; в других же случаях она может привести к грубым ошибкам. Например, при падении камня с небольшой высоты формула (1) применима. Однако при падении тела с очень большой высоты величина скорости может значительно отличаться от выражения (1). В 1945 году парашютист В. Г. Романюк совершил затяжной прыжок, пролетев, не раскрывая парашюта, свыше 12 000 *м*. Тело, падающее в пустоте с такой высоты (без начальной скорости), достигло бы вблизи земли скорости около 500 *м/сек*. Действительно, из формулы $s = \frac{gt^2}{2}$ следует, что время падения (в пустоте) имеет значение

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,000\ м}{9{,}8\ м/сек^2}} \approx 49{,}5\ сек,$$

и мы находим из (1) значение скорости:

$$v = gt \approx 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 49{,}5\ сек \approx 485\ м/сек.$$

(Можно было сразу воспользоваться формулой $v^2 = 2gs$.) Между тем, установлено, что скорость падения парашютиста при затяжном прыжке достигает 50—60 *м/сек* и более уже не увеличивается. Таким образом, формула (1) приводит в этом случае к неправильному выводу.

Другой пример: парашют рассчитан таким образом, что после его раскрытия парашютист приближается к земле со скоростью около 6,5 *м/сек*, с какой бы высоты он ни прыгал.

Ясно, что и здесь формула (1) неприменима.

Все это приводит нас к выводу, что скорость тела, падающего в воздухе, с течением времени *приближается к некоторому определенному значению*. Иначе говоря, через некоторое время после начала падения движение тела становится равномерным, а его ускорение — равным нулю. Это означает, что равнодействующая (сумма) всех сил, действующих на тело, равна нулю.

Нетрудно понять, почему формула (1) непригодна для вычисления скорости падения тела в воздухе. Ведь эта формула выводится из предположения, что тело движется под действием единственной силы, а именно, *силы тяжести*

$$P = mg. \tag{2}$$

Между тем, мы видели, что при падении тела в воздухе равнодействующая становится (через некоторое время после начала движения) равной нулю, т. е. сила тяжести P *уравновешивается* какой-то другой силой, которая не была учтена при выводе формулы (1). Этой уравновешивающей силой является *сила сопротивления воздуха*. Именно сила сопротивления воздуха не дает парашютисту падать слишком быстро; она как бы «поддерживает» парашютиста.

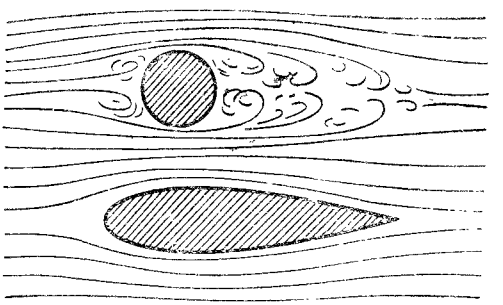
Как учесть силу сопротивления воздуха? Будем считать, что ветра нет. Если тело находится в покое, то сила сопротивления воздуха равна нулю. Чем быстрее начинает двигаться тело, тем «труднее» становится ему рассекать воздух, т. е. сила сопротивления воздуха возрастает. Это легко наблюдать в безветренный день, если двигаться все быстрее и быстрее: шагом, бегом, на велосипеде, ... Мы будем предполагать, что по величине эта сила *пропорциональна скорости*, т. е. равна bv, где v — скорость движения, а b — коэффициент пропорциональности. Это предположение

хорошо оправдывается на опыте для небольших скоростей *) — не более 1—2 *м/сек*. Величина b зависит от размеров и формы тела. Например, при одной и той же скорости движения сила сопротивления воздуха будет для шара примерно в 20 раз больше, чем для «сигарообразного» тела того же поперечного сечения (черт. 1).

Ограничимся этими краткими указаниями и примем в дальнейшем, что сила сопротивления воздуха (мы ее будем обозначать через S) имеет значение

$$S = -bv; \tag{3}$$

знак минус означает, что сила сопротивления имеет направление, обратное направлению скорости.



Черт. 1.

Итак, мы будем считать, что на тело, брошенное вниз с некоторой начальной скоростью, действуют только две силы: сила тяжести P и сила сопротивления воздуха S. На основании второго закона Ньютона мы можем написать:

$$ma = P + S, \tag{4}$$

где m — масса тела, a — его ускорение. За положительное направление на вертикальной прямой удобно принять направление не вверх, а *вниз*, так как скорость падающего тела направлена вниз, и при нашем соглашении она будет величиной положительной. Сила тяжести, направленная вниз,

*) Заметим, что при скоростях, бо́льших чем 1—2 *м/сек*, величина силы сопротивления воздуха становится больше величины bv. Иногда считают, что сила сопротивления воздуха пропорциональна *квадрату* скорости.

также будет величиной положительной. Сила же сопротивления воздуха будет направлена в сторону, противоположную скорости, т. е. вверх, и потому будет отрицательна. Таким образом, подставляя в формулу (4) вместо P и S их значения (2) и (3), получаем

$$ma = mg - bv,$$

или

$$a = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right); \qquad (5)$$

естественно, что ускорение следует считать положительным, если оно направлено вниз, и отрицательным в противном случае.

Уравнение (5) связывает ускорение и скорость неизвестного нам пока движения тела. Из этого уравнения мы и должны определить, как будет изменяться скорость движущегося тела с течением времени.

Качественное решение задачи

В результате приведенных выше рассуждений мы получили *уравнение* (5) для скорости падающего тела. Теперь мы должны *решить* это уравнение. Поэтому дальнейшие рассуждения носят чисто математический характер, хотя для наглядности в них попрежнему идет речь о скорости падения тела.

Уравнение (5) связывает две неизвестные величины: скорость и ускорение. Давая ускорению произвольное значение, мы из уравнения (5) найдем соответствующее значение для скорости. Поэтому на первый взгляд кажется, что *одного* уравнения (5) недостаточно для определения *двух* величин v и a.

Такое мнение, однако, является ошибочным. Ускорение движения тела вполне определяется тем, как изменяется скорость с течением времени. Таким образом, в уравнение (5) входят не совершенно произвольные величины, а *связанные* друг с другом величины v и a. Это и дает возможность *решить* уравнение (5). Изучение связи между скоростью и ускорением приведет нас в дальнейшем к понятию производной.

Мы докажем два свойства скорости, вытекающие из уравнения (5); эти свойства дадут нам совершенно ясное представление о характере падения тела (при сделанных предположениях). В дальнейшем мы получим и точную формулу для скорости.

Свойство 1. *Если в начальный момент времени скорость падения v_0 была меньше $\frac{mg}{b}$, то в течение всего движения будет $v \leqslant \frac{mg}{b}$. Если же $v_0 > \frac{mg}{b}$, то и все время будет $v \geqslant \frac{mg}{b}$.*

Допустим противное. Пусть, например, $v_0 < \frac{mg}{b}$, а в некоторый момент времени t_1 (т. е. через t_1 секунд после начала падения) скорость стала больше, чем $\frac{mg}{b}$. Тогда, в некоторый промежуточный момент времени (может быть, и не один раз) скорость была *равна* $\frac{mg}{b}$. Пусть t_0 — *последний* момент времени (за первые t_1 секунд), когда скорость была равна $\frac{mg}{b}$, так что в промежутке времени между t_0 и t_1 оставалось справедливым неравенство $v > \frac{mg}{b}$. Согласно формуле (5) отсюда следует, что ускорение a в течение всего этого промежутка времени было *отрицательным*. Это, однако, противоречит тому, что за рассматриваемый промежуток времени скорость изменилась от значения $\frac{mg}{b}$ до *большего* значения. Полученное противоречие доказывает, что скорость не может стать больше значения $\frac{mg}{b}$.

Точно так же рассматривается случай, когда $v_0 > \frac{mg}{b}$.

Свойство 2. *Если $v_0 < \frac{mg}{b}$, то с течением времени скорость падения увеличивается, все более приближаясь к значению $\frac{mg}{b}$; если же $v_0 > \frac{mg}{b}$, то скорость падения все время уменьшается, также приближаясь к значению $\frac{mg}{b}$.*

В самом деле, если, например, $v_0 > \frac{mg}{b}$, то, как мы знаем из свойства 1, в течение всего времени движения будет $v \geqslant \frac{mg}{b}$. Из формулы (5) следует, что ускорение будет отрицательным и, следовательно, скорость падения будет все время уменьшаться.

Докажем, что с течением времени разность $v - \frac{mg}{b}$ станет меньше любой заранее выбранной как угодно малой величины h (ее можно взять, например, равной 0,001 *м/сек*). Для этого рассмотрим момент времени

$$t^* = \frac{\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)m}{hb}.$$

За время, протекшее от начала движения до момента t^*, скорость падения уменьшилась от значения v_0 до значения, не меньшего чем $\frac{mg}{b}$, т. е. уменьшилась не больше, чем на $v_0 - \frac{mg}{b}$. Поэтому среднее ускорение отрицательно, и по абсолютной величине оно не больше, чем

$$\frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{t^*} = \frac{hb}{m}.$$

Отсюда следует, что в некоторый промежуточный момент времени величина ускорения была не больше, чем $\frac{hb}{m}$, ибо если бы в течение всего этого промежутка времени величина ускорения была больше $\frac{hb}{m}$, то и среднее значение ускорения было бы больше $\frac{hb}{m}$.

Итак, пусть в момент времени t' имеем:

$$|a| < \frac{hb}{m}.$$

Отсюда согласно (5) мы получаем:

$$\left|v - \frac{mg}{b}\right| = \frac{m}{b} \cdot |a| \leqslant \frac{m}{b} \cdot \frac{hb}{m} = h,$$

т. е. в момент времени t' скорость отличается от $\frac{mg}{b}$ меньше, чем на h. Это будет справедливо и для всех последующих моментов времени, так как скорость v убывает, оставаясь больше значения $\frac{mg}{b}$.

Заметим, что мы доказали, таким образом, несколько более точное предложение, чем свойство 2, а именно, что

не позже чем через

$$t^* = \left| v_0 - \frac{mg}{b} \right| \cdot \frac{m}{hb} \text{ сек} \qquad (6)$$

после начала падения скорость будет отличаться от $\frac{mg}{b}$ *меньше, чем на* h.

Свойства 1 и 2 дают в некотором смысле решение поставленной задачи. Хотя мы и не получили еще точной формулы для скорости, но мы знаем *качественные* законы изменения скорости, т. е. знаем, *как* она будет изменяться с течением времени.

Исследуем, например, движение парашютиста. Если парашютист раскрывает парашют сразу после прыжка, то скорость его падения, вначале равная нулю, будет увеличиваться, но никогда не будет больше значения $\frac{mg}{b}$. Величина mg (вес парашютиста с парашютом) известна, b же зависит от диаметра купола парашюта. Это дает возможность *рассчитать* величину парашюта, требуемую для того, чтобы наибольшая возможная скорость падения парашютиста, равная $\frac{mg}{b}$, была безопасна для его приземления. При падении же парашютиста в затяжном прыжке (с нераскрытым парашютом) коэффициент в выражении для силы сопротивления воздуха — обозначим его значение в этом случае через b' — имеет другое, меньшее значение, чем при падении с раскрытым парашютом. Поэтому наибольшая возможная скорость падения $\frac{mg}{b'}$ в этом случае больше, чем скорость падения $\frac{mg}{b}$ с раскрытым парашютом. Следовательно, перед раскрытием парашюта в затяжном прыжке скорость падения парашютиста больше $\frac{mg}{b}$, и, согласно свойству 1, после раскрытия парашюта она будет уменьшаться и приближаться к $\frac{mg}{b}$, оставаясь все время больше чем $\frac{mg}{b}$. Таким образом, и в этом случае приземление парашютиста через некоторое время после раскрытия парашюта становится безопасным.

Приведем численный пример, иллюстрирующий сказанное.

Пример 1. Пусть парашют рассчитан таким образом, что скорость падения парашютиста с раскрытым парашютом

приближается к предельному значению 6 *м/сек*, т. е. $\frac{mg}{b} = 6$ *м/сек*. Поставим следующий вопрос. Парашютист, падая в затяжном прыжке со скоростью 50 *м/сек*, раскрывает парашют. Через сколько времени скорость его падения станет меньше 10 *м/сек*, т. е. будет отличаться от предельного значения $\frac{mg}{b} = 6$ *м/сек* меньше, чем на $h = 4$ *м/сек*?

Решение. Из равенства $\frac{mg}{b} = 6$ *м/сек* мы получаем:

$$\frac{m}{b} = \frac{mg}{b} \cdot \frac{1}{g} \approx \frac{6 \text{ м/сек}}{10 \text{ м/сек}^2} = 0{,}6 \text{ сек}.$$

Далеее, из формулы (6) заключаем, что скорость падения будет отличаться от предельного значения $\frac{mg}{b} = 6$ *м/сек* на $h = 4$ *м/сек* не позже, чем через $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{m}{b} \cdot \frac{1}{h}$ секунд, т. е. при наших предположениях через

$$(50 \text{ м/сек} - 6 \text{ м/сек}) \cdot 0{,}6 \text{ сек} \cdot \frac{1}{4 \text{ м/сек}} = 6{,}6 \text{ сек}.$$

Формула скорости падения тела. Число *e*

Свойства 1 и 2 показывают, как будет с течением времени меняться скорость падения тела. В этом параграфе мы получим точную формулу для скорости падения тела. В выражение скорости входит некоторое число, значение которого с пятью десятичными знаками есть 2,71828... Это весьма часто встречающееся в вопросах «высшей» математики число обозначают буквой *e* (подобно тому, как часто встречающееся число 3,14159..., выражающее отношение длины окружности к ее диаметру, обозначают буквой π). Почему в формулу скорости входит это число $e = 2{,}71828...$ и как его определить точно, — мы увидим в дальнейшем, а сейчас приведем (пока без вывода) формулу скорости падения тела и разберем примеры, иллюстрирующие применение этой формулы.

Пусть v_0—начальная скорость падения тела, а v_t—скорость падения этого тела в момент времени t (т. е. через t секунд после начала падения). *Тогда мы имеем*:

$$v_t = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (7)$$

Таково точное решение уравнения (5); доказательство формулы (7) будет дано ниже. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2. Покажем, что из формулы (7) сразу вытекают полученные выше качественные законы изменения скорости (свойства 1 и 2).

В самом деле, число $e^{-\frac{b}{m}}$, получающееся от возведения числа e в отрицательную степень, положительно и меньше единицы, т. е. $0 < e^{-\frac{b}{m}} < 1$. При увеличении t степень $e^{-\frac{b}{m}t} = \left(e^{-\frac{b}{m}}\right)^t$ уменьшается (и может стать как угодно малой при достаточно больших t). Поэтому из формулы (7) ясно, что, например при $v_0 > \frac{mg}{b}$, скорость v_t всегда больше значения $\frac{mg}{b}$ $\left(\text{ибо } v_0 - \frac{mg}{b} > 0\right)$, убывает с течением времени и приближается к $\frac{mg}{b}$.

Пример 3. Вычислим, пользуясь формулой (7), величину скорости падения парашютиста через 6,6 *сек* после раскрытия парашюта в затяжном прыжке; численные значения возьмем те же, что и в примере 1 (стр. 11), т. е. $\frac{mg}{b} = 6$ *м/сек*, $v_0 = 50$ *м/сек*. (Мы видели, что эта скорость должна быть меньше 10 *м/сек*.)

Решение. Мы имеем:

$$\frac{b}{m} = g : \frac{mg}{b} \approx 10 \text{ м/сек}^2 : 6 \text{ м/сек} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\text{сек}}.$$

Далее, пользуясь таблицами логарифмов (десятичный логарифм числа e приближенно равен 0,4343), легко находим:

$$\lg\left(e^{-\frac{b}{m}t}\right) = -\frac{b}{m}t \lg e \approx$$

$$\approx -\frac{5}{3} \cdot 6{,}6 \cdot 0{,}4343 = -4{,}7773 = -5 + 0{,}2227 = \bar{5}{,}2227,$$

откуда

$$e^{-\frac{b}{m}t} \approx 0{,}0000167.$$

Подставляя это значение в формулу (7), получаем:

$$v_{6{,}6 \text{ сек}} \approx 6 \text{ м/сек} + (50 \text{ м/сек} - 6 \text{ м/сек})\, 0{,}0000167 \approx$$

$$\approx 6{,}000735 \text{ м/сек}.$$

Точно так же легко подсчитать, пользуясь формулой (7), что скорость падения парашютиста будет равна 10 *м/сек* (при тех же условиях) через $t = \frac{3 \lg 11 \text{ сек}}{5 \lg e} \approx 1{,}44$ *сек* после раскрытия парашюта *).

Таким образом, *при раскрытии парашюта в затяжном прыжке скорость падения в течение* 1—2 *секунд уменьшается от* 50—60 *м/сек почти до нормальной скорости падения* 6—7 *м/сек при раскрытом парашюте.* Парашютист при этом движется с большим замедлением, т. е. испытывает большую силу (рывок вверх) со стороны парашюта, на который и действует, в основном, сила сопротивления воздуха. Кто наблюдал затяжные прыжки (например, во время авиационных праздников), тот мог видеть, что быстро падающий вниз человек вдруг, в момент раскрытия парашюта, резко уменьшает скорость падения: кажется даже, что он на мгновенье приостанавливается в воздухе.

Пример 4. Пусть скорость падения парашютиста при затяжном прыжке приближается к предельному значению $\frac{mg}{b} = 50$ *м/сек*. Начальную скорость падения v_0 примем равной нулю. Как велика будет ошибка, если вместо формулы (7) мы будем пользоваться формулой (1), применимой для падения тела в пустоте?

Решение. Мы имеем:

$$-\frac{b}{m} = -\frac{g}{\frac{mg}{b}} \approx -\frac{10 \text{ м/сек}^2}{50 \text{ м/сек}} = -0{,}2 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Таким образом, согласно формуле (7) скорость падения парашютиста будет иметь значение:

$$v_t = 50\ (1 - e^{-0{,}2t}).$$

Из (1) мы получаем следующее значение скорости падения тела в пустоте:

$$v_t = gt \approx 10t.$$

---

*) В действительности же скорость падения будет еще быстрее приближаться к предельному значению 6 *м/сек*, так как выражение (3) для силы сопротивления воздуха хорошо выполняется лишь при малых скоростях падения. При больших скоростях величина силы сопротивления воздуха растет *быстрее*, чем bv.

Таким образом, отношение этих скоростей имеет вид:

$$\frac{50\,(1-e^{-0{,}2t})}{gt} \approx \frac{5}{t}(1-e^{-0{,}2t}).$$

Положив здесь $t=1$ *сек*, получим (после легких вычислений по таблицам логарифмов) для написанного отношения величину $\approx 0{,}91$, а при $t=2$ *сек* — величину $\approx 0{,}82$. Мы видим, *что уже в первые секунды падения благодаря наличию силы сопротивления воздуха скорость весьма ощутительно отличается от величины* gt.

Перейдем к доказательству *) формулы (7). Для этого прежде всего постараемся уяснить себе вопрос о связи между скоростью и ускорением. Если v_t — скорость движения тела в момент времени t, а v_{t+h} — скорость его движения через h секунд после этого момента времени (т. е. в момент времени $t+h$), то отношение $\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$ называется *средним ускорением* тела за промежуток времени h и обозначается через $a_{\text{ср}}$:

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

Если h очень мало (скажем, 0,01 *сек* или еще меньше, в зависимости от характера движения тела), то за столь короткий промежуток времени ускорение мало изменится, так что $a_{\text{ср}}$ будет мало отличаться от значения ускорения a_t в момент времени t. Разность между a_t и $a_{\text{ср}}$ будет тем меньше, чем меньше h. Иначе говоря, если для h брать все меньшие и меньшие значения (скажем, 0,1 *сек*; 0,01 *сек*; 0,001 *сек* и т. д.), не меняя при этом t, то величина $a_{\text{ср}}$ будет меняться, все более приближаясь к a_t. Математически этот факт записывают так:

$$a_t = \lim_{h\to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{h\to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

Знак lim означает *предел* того выражения, которое написано вслед за ним (т. е. выражения $a_{\text{ср}}$), а стоящее внизу обозначение $h \to 0$ показывает, что речь идет о пределе величины $a_{\text{ср}}$ при стремлении h к нулю.

Итак, мы получили соотношение, выражающее зависимость ускорения от скорости. Докажем теперь еще три

*) Если доказательство покажется трудным, то читатель может пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

свойства скорости рассматриваемого движения. Эти свойства помогут нам доказать формулу (7).

Свойство 3. *Если скорость и ускорение движущегося тела удовлетворяют соотношению* (5), *то значение* v_0 *начальной скорости однозначно определяет дальнейшее изменение скорости.*

Допустим противное. Пусть два тела T и T^* с одинаковыми значениями m и b движутся таким образом, что их скорости и ускорения удовлетворяют соотношению (5), и пусть в момент $t=0$ эти тела имели одинаковую начальную скорость v_0, а через t_1 секунд их скорости оказались различными, скажем, скорость v_1 первого тела оказалась больше скорости v_1^* второго тела. Будем при этом для определенности предполагать, что $v_0 > \frac{mg}{b}$ (в случае обратного неравенства доказательство аналогично). Пусть t_0 — последний (за первые t_1 секунд) момент времени, когда скорости обоих тел совпадали. Тогда в промежутке времени от t_0 до t_1 скорость v первого тела все время была больше скорости v^* второго тела, т. е. $v > v^*$. Отсюда следует, что

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b},$$

причем обе величины $v - \frac{mg}{b}$ и $v^* - \frac{mg}{b}$ положительны, так как $v_0 > \frac{mg}{b}$ (см. свойство 1). Из неравенств

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b} > 0$$

мы на основании формулы (5) заключаем, что ускорения a и a^* обоих брошенных тел отрицательны, причем по величине ускорение a больше, чем a^*. Но это означает, что за промежуток времени от t_0 до t_1 скорости тел T и T^* уменьшились, причем скорость тела T уменьшилась на *бо́льшую* величину, чем скорость тела T^*, т. е. в момент времени t_1 скорость v должна быть *меньше*, чем v^* (так как в момент t_0 скорости тел совпадали). Однако мы предположили обратное. Полученное противоречие показывает, что свойство 3 справедливо.

Свойство 4. *Если два одинаковых* *) *тела* T *и* T^* *одновременно начинают падать с начальными скоростями* v_0

*) В том смысле, что для них величины m и b одинаковы.

и v_0^*, то для любого момента t их скорости v_t и v_t^* будут удовлетворять соотношению

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}. \tag{8}$$

Для доказательства рассмотрим воображаемое тело $\tilde{T}$, движущееся так, что в момент времени t его скорость равна

$$\tilde{v}_t = qv_t + (1-q)\frac{mg}{b},$$

где

$$q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}.$$

Покажем, что скорость и ускорение движения этого воображаемого тела будут удовлетворять соотношению (5). Найдем среднее ускорение $\tilde{a}_{ср}$ этого воображаемого движения за промежуток времени между моментами t и $t+h$. Имеем:

$$\tilde{a}_{ср} = \frac{\tilde{v}_{t+h} - \tilde{v}_t}{h} = \frac{\left[qv_{t+h} + (1-q)\frac{mg}{b}\right] - \left[qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}\right]}{h} =$$

$$= q\,\frac{v_{t+h} - v_t}{h} = q \cdot a_{ср},$$

где $a_{ср}$ — среднее ускорение тела T за этот же промежуток времени. Если в соотношении $\tilde{a}_{ср} = q \cdot a_{ср}$ брать h все меньше и меньше, то $\tilde{a}_{ср}$ будет приближаться к ускорению $\tilde{a}_t$ воображаемого движения в момент времени t, а $a_{ср}$ — к ускорению a_t тела T в этот же момент. Таким образом, мы получим $\tilde{a}_t = qa_t$ (для произвольного момента t), и соотношение (5) даст нам:

$$\tilde{a} = qa = -q\,\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right) =$$

$$= -\frac{b}{m}\left[qv + (1-q)\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}\right] = -\frac{b}{m}\left(\tilde{v} - \frac{mg}{b}\right),$$

т. е. для рассмотренного воображаемого движения соотношение (5) выполнено.

Далее, начальная скорость воображаемого тела $\tilde{T}$ равна

$$\tilde{v}_0 = qv_0 + (1-q)\frac{mg}{b} =$$

$$= q\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} \cdot \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} = v_0^*.$$

Итак, тела $\tilde{T}$ и T^* имеют одинаковую начальную скорость и оба движутся так, что их скорости и ускорения удовлетворяют уравнению (5). Отсюда в силу свойства 3 следует, что скорости v_t^* и $\tilde{v}_t$ этих движений совпадают в любой момент времени t, т. е.

$$v_t^* = qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{\left[qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}\right] - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} =$$

$$= \frac{q\left(v_t - \frac{mg}{b}\right)}{v_t - \frac{mg}{b}} = q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}},$$

и свойство 4 доказано.

Свойство 5. *Для любых моментов времени t и τ справедливо соотношение*

$$\frac{v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \frac{v_t - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} \cdot \frac{v_\tau - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}, \tag{9}$$

где v_0, v_τ, v_t, $v_{t+\tau}$ — скорости падения тела T в моменты времени 0, τ, t, $t+\tau$.

В самом деле, начнем наблюдать падение тела T с момента времени τ. Через t секунд после этого момента (т. е. через $t+\tau$ секунд после начала движения) скорость будет равна $v_{t+\tau}$. Значит, если мы в момент $t=0$ кроме рассмотренного тела T бросим второе тело T^*, начальная скорость v_0^* которого равна v_τ,

то в момент времени t скорость v_t^* этого второго тела будет равна $v_{t+\tau}$, т. е. $v_t^* = v_{t+\tau}$. Таким образом, из (8) мы получаем

$$\frac{v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{v_\tau - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}},$$

или, иначе,

$$\left(v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}\right)\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) = \left(v_t - \frac{mg}{b}\right)\left(v_\tau - \frac{mg}{b}\right).$$

Разделив обе части полученного равенства на $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)^2$, мы и получим требуемое соотношение (9).

Установив формулу (9), перейдем к точному вычислению значения скорости v_t. Для того чтобы избежать применения громоздких формул, временно введем обозначение

$$u_t = \frac{v_t - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}.$$

Тогда формула (9) примет более простой вид:

$$u_{t+\tau} = u_t \cdot u_\tau. \tag{10}$$

При $\tau = t$ формула (10) дает:

$$u_{2t} = (u_t)^2.$$

Точно так же, полагая $\tau = 2t$, получим из (10)

$$u_{3t} = u_t \cdot u_{2t} = u_t \cdot (u_t)^2 = (u_t)^3,$$

а при $\tau = 3t$ будем иметь

$$u_{4t} = u_t \cdot u_{3t} = u_t \cdot (u_t)^3 = (u_t)^4$$

и т. д. Продолжая таким образом, мы убедимся в том, что при любом целом положительном n будет иметь место соотношение

$$u_{nt} = (u_t)^n. \tag{11}$$

Полагая в этом равенстве $t = \frac{p}{n}$ *сек* и извлекая корень n-й степени, получим

$$(u_p)^{\frac{1}{n}} = u_{\frac{p}{n}}.$$

Далее, полагая в равенстве (11) $t = 1$ *сек* и заменяя n через p, найдем

$$u_p = (u_1)^p.$$

Из двух последних равенств вытекает соотношение

$$u_{\frac{p}{n}} = (u_1)^{\frac{p}{n}}.$$

Таким образом, если t есть любое положительное рациональное число (т. е. число вида $\frac{p}{n}$, где p и n — целые положительные числа), то

$$u_t = (u_1)^t,$$

или, возвращаясь к первоначальным обозначениям,

$$\frac{v_t - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^t; \qquad (12)$$

здесь v_1 есть скорость падения в момент времени $t = 1$ *сек*.

Из того, что соотношение (12) верно для рациональных значений t, следует его справедливость для всех t.

Возьмем, например, момент времени $t = \sqrt{2}$ *сек*$=1{,}414\ldots$ *сек*. Так как числа 1,4; 1,41; 1,414 и т. д. рациональны, то для этих значений t соотношение (12) справедливо:

$$\frac{v_{1,4} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{1,4}; \quad \frac{v_{1,41} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{1,41}; \ldots \qquad (13)$$

Если брать для t рациональные значения, являющиеся все более точными приближениями числа $\sqrt{2}$ (например, 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 и т. д.), то левые части равенств (13) будут приближаться к пределу $\frac{v_{\sqrt{2}} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}$, а правые — к пределу $\left(\frac{v_1 - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}$ *). Таким

*) Ср., например, понятие о степени с иррациональным показателем в учебнике алгебры А. П. Киселева, ч. II (в издании 1954 года см. стр. 97).

образом, в пределе мы получим

$$\frac{v_{\sqrt{2}}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Подобное рассуждение применимо, конечно, не только к $\sqrt{2}$, но и к любому иррациональному значению для t. Таким образом, соотношение (12) верно при любом t.

Введя обозначение

$$\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=c,$$

мы получим из (12)

$$\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=c^t,$$

откуда найдем

$$v_t=\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^t. \tag{14}$$

Полученная формула (14) для скорости падения еще не является окончательной, так как мы не знаем числа c, входящего в эту формулу. Для вычисления числа c найдем из формулы (14) ускорение тела в начальный момент движения. Среднее ускорение за первые h секунд падения имеет согласно (14) следующее значение:

$$a_{\text{ср}}=\frac{v_h-v_0}{h}=\frac{\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^h-v_0}{h}=\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}.$$

При стремлении h к нулю это выражение даст нам ускорение a_0 в начальный момент:

$$a_0=\lim_{h\to 0}a_{\text{ср}}=\lim_{h\to 0}\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}. \tag{15}$$

Если мы обозначим выражение c^h-1 через x, то получим:

$$c^h-1=x,\quad c^h=1+x,\quad h=\log_c(1+x).$$

Таким образом, вместо выражения $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{c^h - 1}{h}$, стоящего в (15) под знаком предела, мы получим выражение

$$\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{x}{\log_e (1+x)} = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\frac{1}{x}\log_e (1+x)} = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_e (1+x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Заметим, что при стремлении числа h к нулю число c^h имеет пределом единицу, а число $x = c^h - 1$ приближается к нулю. Итак, мы можем написать:

$$a_0 = \lim_{x \to 0} \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_e (1+x)^{\frac{1}{x}}}. \qquad (16)$$

Предел выражения $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *при стремлении числа* x *к нулю называют числом* e. Мы не будем *доказывать*, что этот предел существует, т. е. что выражение $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ действительно приближается к некоторому значению при $x \to 0$. Доказательство (и притом элементарное) существования этого предела имеется в начальных главах любого курса высшей математики *). Мы ограничимся вычислением значения выражения $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x = 0{,}1$; $x = 0{,}01$; $x = 0{,}001$; $x = 0{,}0001$. Результаты такого вычисления приведены здесь (вычисления эти можно вести с помощью таблиц логарифмов, лучше всего семизначных; можно также пользоваться формулой бинома Ньютона):

$$(1+0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}59374,$$

$$(1+0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} = 1{,}01^{100} \approx 2{,}70481,$$

$$(1+0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} = 1{,}001^{1000} \approx 2{,}71692,$$

$$(1+0{,}0001)^{\frac{1}{0{,}0001}} = 1{,}0001^{10000} \approx 2{,}71814.$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том I.

Эти вычисления довольно наглядно показывают, что при $x \to 0$ выражение $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет предел $e = 2{,}71\ldots$ Из (16) мы теперь получаем

$$a_0 = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e}.$$

С другой стороны, из (5) имеем

$$a_0 = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right).$$

Приравнивая полученные выражения для a_0, найдем

$$\frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e} = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right),$$

откуда

$$\log_c e = -\frac{m}{b}; \quad e = c^{-\frac{m}{b}}; \quad c = e^{-\frac{b}{m}}.$$

Наконец, подставляя в формулу (14) вместо c его значение $e^{-\frac{b}{m}}$, мы получаем формулу (7), чем доказательство и завершается.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Понятие производной

Итак, уравнение (5) допускает совершенно точное решение. Это уравнение связывает величину v (скорость падения) с величиной a, показывающей *скорость изменения величины* v (ускорение есть «скорость изменения скорости»).

Когда мы говорим о скорости изменения величины, то при этом предполагается, что мы имеем дело не с постоянной величиной, характеризуемой одним числом, а с величиной *переменной*, т. е. величиной, значение которой меняется с течением времени. Примерами величин, меняющихся с течением времени (зависящих от времени), являются: скорость и ускорение неравномерного движения, сила переменного тока и т. п.

Пусть y — величина, значение которой меняется с течением времени. Будем для удобства обозначать через y_t то значение этой величины, которое она принимает через t секунд после начала исследуемого процесса. Разность $y_{t+h}-y_t$ показывает, насколько изменилась за h секунд (между моментами времени t и $t+h$ секунд после начала процесса) переменная величина y. Отношение же

$$\frac{y_{t+h}-y_t}{h} \qquad (17)$$

показывает, на какую величину менялось, в среднем, y за каждую секунду (в течение этого промежутка времени), т. е. это отношение является *средней скоростью изменения* переменной y. Выбирая h все меньше и меньше, будем получать значения средней скорости за все меньшие промежутки времени, начиная от момента t. В пределе (при стремлении h к нулю) отношение (17) даст *скорость изменения вели-*

чины y в момент времени t. Мы уже знаем, что эту скорость изменения математически обозначают в виде

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_{t+h}-y_t}{h}. \tag{18}$$

Выражение (18) называется *производной* величины y по времени t; как мы видели, она дает скорость изменения переменной y. Можно рассматривать переменную, которая изменяется не с течением времени, а зависит от какой-нибудь другой величины. Например, площадь круга зависит от его радиуса; обозначая площадь круга радиуса R через S_R, получим:

$$S_R=\pi R^2. \tag{19}$$

Рассматривая вопрос о зависимости между площадью круга и его радиусом, мы придем к отношению $\frac{S_{R+h}-S_R}{h}$, выражающему среднюю скорость изменения площади при изменении радиуса. Предел этого отношения (при $h\to 0$) есть производная от величины S по R.

Понятие производной является одним из основных понятий высшей математики. Если переменная y меняется в зависимости от изменения величины x (или, как говорят, если y является функцией от x), то производная от y по x обозначается символом y' или, чаще, одним из символов $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{y_{x+h}-y_x}{h};$$

букву d здесь нельзя сокращать, так как она не является множителем, а обозначает *операцию взятия производной* или, как еще говорят, операцию *дифференцирования*.

Вычислим для примера производную $\frac{dS}{dR}$ от функции (19):

$$\frac{dS}{dR}=\lim_{h\to 0}\frac{S_{R+h}-S_R}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\pi(R+h)^2-\pi R^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(2\pi R+\pi h)=2\pi R,$$

т. е. производная от площади круга по радиусу равна длине окружности этого круга.

В качестве второго примера вычислим производную $\frac{ds}{dt}$ от пути по времени. Обозначим через s_t путь, пройденный некоторым телом в момент времени t (т. е. через t секунд после начала движения). Тогда отношение $\frac{s_{t+h}-s_t}{h}$ есть средняя скорость за промежуток времени между моментами t и $t+h$, а предел этого отношения при $h \to 0$ есть значение скорости в момент времени t:

$$v_t = \lim_{h \to 0} \frac{s_{t+h}-s_t}{h} = \frac{ds}{dt}.$$

Аналогично вычисляется производная $\frac{dv}{dt}$. Отношение

$$\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$$

есть среднее ускорение за промежуток времени между моментами t и $t+h$, а предел этого отношения есть значение ускорения в момент времени t (ср. сказанное на стр. 15):

$$a_t = \lim_{h \to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h} = \frac{dv}{dt}.$$

Доказанные соотношения

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{20}$$

и

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{21}$$

играют чрезвычайно большую роль в механике.

Дифференциальное уравнение

Обратимся снова к уравнению (5). Согласно (21) это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right). \tag{22}$$

Теперь ясно, что это есть уравнение с одной неизвестной величиной v, но только уравнение не *алгебраическое*, а уравнение, связывающее величину v и ее производную. Такое уравнение называется *дифференциальным*. Сравнивая дифференциальное уравнение (22) и его решение (7) и обо-

значая $\frac{b}{m}$ через k, а $\frac{mg}{b}$ через c, можем высказать следующее утверждение.

Теорема. *Решением дифференциального уравнения*

$$\frac{dv}{dt} = -k(v - c) \tag{23}$$

является выражение

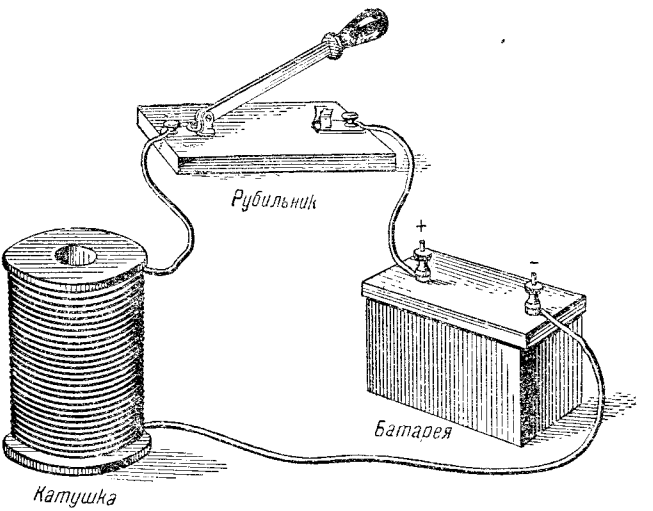
$$v = c + (v_0 - c)\, e^{-kt}, \tag{24}$$

где v_0 *— начальное значение* (т. е. значение при $t = 0$) *величины* v.

В дальнейшем мы сможем, пользуясь этой теоремой, рассчитать и некоторые другие физические явления.

Две задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

а) Включение тока. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из катушки и батареи (черт. 2). Электрические



Черт. 2.

свойства катушки довольно сложны, но в ряде случаев их можно с большой степенью точности характеризовать двумя величинами: *сопротивлением* катушки и ее *индуктивностью*.

Именно, катушку представляют себе в виде двух последовательно соединенных частей: сопротивления и индуктивности (черт. 3). Падение напряжения на сопротивлении пропорционально силе тока i, проходящего через катушку (закон Ома):

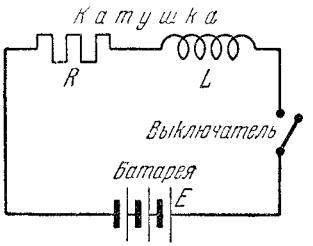
$$V = Ri;$$

коэффициент пропорциональности R называется *сопротивлением* катушки. Падение напряжения на индуктивности пропорционально *скорости изменения силы тока*. Обозначая скорость изменения силы тока через w (она измеряется, например, в амперах в секунду), а коэффициент пропорциональности через L, мы получим для падения напряжения выражение

$$V = Lw.$$

Величина L называется *индуктивностью* катушки. Падение напряжения на катушке складывается из падений напряжения на сопротивлении и индуктивности, т. е. выражается формулой

$$V = Lw + Ri. \qquad (25)$$



Черт. 3.

Формула (25) хорошо подтверждается на опытах (если через катушку проходит ток не очень большой частоты). Этой формулой мы и будем пользоваться. Обозначим электродвижущую силу (э. д. с.) батареи через E. Приравнивая э. д. с. батареи падению напряжения в катушке, на основании второго закона Кирхгофа (мы пренебрегаем внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением подводящих проводов), мы получим уравнение

$$E = Lw + Ri,$$

или

$$w = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right). \qquad (26)$$

Решение этого уравнения без труда получается из формулированной на стр. 27 теоремы. В самом деле, обозначая силу тока в момент времени t через i_t, можем сказать, что величина

$$w_{ср} = \frac{i_{t+h} - i_t}{h}$$

есть средняя скорость изменения силы тока за промежуток времени между моментами t и $t+h$. При $h \to 0$ мы получаем скорость изменения силы тока в момент времени t:

$$w = \lim_{h \to 0} \frac{i_{t+h} - i_t}{h} = \frac{di}{dt}.$$

Итак, величина w есть производная силы тока i, и уравнение (26) мы можем переписать в виде

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right).$$

Это уравнение отличается от уравнения (23) только тем, что искомая переменная величина обозначается не через v, а через i, что, конечно, несущественно. При этом постоянные k и c, имеющиеся в уравнении (23), принимают в рассматриваемом случае такие значения:

$$k = \frac{R}{L}, \quad c = \frac{E}{R}.$$

Таким образом, решение написанного дифференциального уравнения будет иметь вид (см. (24)):

$$i_t = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Если в момент включения батареи (при $t = 0$) сила тока i_0 была равна нулю, то получим более простую формулу

$$i_t = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Из этой формулы следует, что сила тока, равная нулю в момент включения, все время увеличивается и приближается к значению $\frac{E}{R}$, т. е. к значению силы тока, который протекал бы по катушке, если бы она имела то же сопротивление R, но совсем не обладала индуктивностью.

б) Радиоактивный распад. Пусть имеется кусок породы, в котором включено некоторое количество радиоактивного вещества. Атомы радиоактивного вещества могут распадаться, превращаясь в другое химическое вещество — *продукт распада*. Таким образом, с течением времени количество радио-

активного вещества, имеющегося в куске породы, уменьшается. Введем понятие *скорости распада*. Пусть в некоторый момент времени t количество радиоактивного вещества в породе было m_t *г*, а спустя h лет уменьшилось (благодаря распаду) и стало равным m_{t+h} *г*. Выражение

$$\frac{m_{t+h} - m_t}{h}$$

показывает, на сколько грамм, в среднем, уменьшалась масса радиоактивного вещества ежегодно (в течение рассмотренного промежутка времени); это выражение естественно назвать *средней скоростью распада* за рассматриваемый промежуток времени. Предел, к которому будет стремиться значение средней скорости при $h \to 0$, есть скорость распада в момент t. Обозначим ее через u:

$$u = \lim_{h \to 0} \frac{m_{t+h} - m_t}{h} = \frac{dm}{dt}.$$

Заметим, что скорость распада *отрицательна*, так как масса радиоактивного вещества уменьшается с течением времени.

От чего зависит скорость распада? При небольших количествах радиоактивного вещества в породе можно считать, что *скорость распада прямо пропорциональна количеству радиоактивного вещества, имеющегося в куске в данный момент времени*, т. е. что имеет место соотношение

$$u = -km,$$

где m — масса имеющегося радиоактивного вещества, а k — положительная постоянная величина (коэффициент пропорциональности).

Приблизительную правильность этого закона легко обосновать, считая, что распад атомов не влияет на состояние оставшихся атомов радиоактивного вещества. При этом условии можно считать, что за единицу времени из каждого грамма радиоактивного вещества распадается всегда примерно одно и то же количество, скажем k *г*, независимо от того, сколько еще радиоактивного вещества имеется в породе. Тогда из m *г* будет за единицу времени распадаться km *г* радиоактивного вещества.

Можно ли считать, что распад не влияет на состояние оставшихся радиоактивных атомов? Ведь частицы распавшегося атома могут, попав в другой атом радиоактивного вещества, вызвать его распад; снова полетят частицы, — это может вызвать распад дальнейших атомов, и т. д. Подобная *цепная реакция* (на таком про-

цессе основано, например, действие атомной бомбы) противоречила бы независимости распада атомов. Для того чтобы подобная цепь последовательных распадов была невозможна, нужно, чтобы вылетающие при распаде частицы терялись, не попадая (в большинстве случаев) в другие радиоактивные атомы. Это будет, если количество радиоактивного вещества в куске породы составляет малый процент, а основная масса породы является нерадиоактивной. Тогда подавляющее большинство вылетевших при распаде частиц теряется, попадая в нерадиоактивные атомы породы, и цепная реакция невозможна. Поэтому при небольших количествах радиоактивного вещества в породе можно приближенно считать распад атомов независимым.

Таким образом, для определения массы нераспавшегося радиоактивного вещества мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

отличающееся от уравнения (23) тем, что искомая величина обозначена буквой m, а не v, а постоянная c в данном случае равна нулю. Таким образом, согласно (24) решение будет иметь вид:

$$m_t = m_0 e^{-kt}, \tag{27}$$

где m_0 — масса радиоактивного вещества в начальный момент времени (когда мы начинаем интересоваться процессом распада).

Пример 5. Через сколько лет количество радиоактивного вещества уменьшится вдвое?

Решение. Для ответа на этот вопрос нужно определить t из уравнения

$$m_0 e^{-kt} = \frac{1}{2} m_0.$$

После сокращения на m_0 и логарифмирования находим:

$$t = \frac{1}{k} \log_e 2 \approx \frac{0{,}69}{k}.$$

Этот промежуток времени называют *периодом полураспада* данного радиоактивного вещества. Отметим, что этот промежуток времени не зависит от того, *сколько* было взято радиоактивного вещества, а зависит только от k, т. е. от того, *какое* взято радиоактивное вещество. Например, период полураспада радия равен 1590 лет, период полураспада урана 238 — около 4,5 миллиарда лет.

Пример 6. Формула (27) позволяет сделать некоторые выводы о *возрасте Земли*.

Пусть в куске породы, вынутом из недр Земли, находится, кроме посторонних примесей, m г радиоактивного вещества и p г его продукта распада. Предположим еще, что из каждого грамма этого радиоактивного вещества получается (после полного распада) r г продукта распада. Это означает, что p г продукта распада произошли из $\frac{p}{r}$ г радиоактивного вещества. Таким образом, если считать, что в некоторый момент времени процесс распада в рассматриваемом куске породы начался (т. е. было только радиоактивное вещество без единого атома продукта распада), то начальная масса радиоактивного вещества была равна $m+\frac{p}{r}$. Для определения времени, прошедшего от такого воображаемого момента (начала распада) до наших дней, следует согласно (27) решить относительно t уравнение

$$m=\left(m+\frac{p}{r}\right)e^{-kt},$$

откуда получаем:

$$t=\frac{1}{k}\log_e\left(1+\frac{p}{rm}\right).$$

Подобные вычисления для некоторых горных пород, имеющихся на Земле, дают для t примерно одинаковое значение порядка $2\cdot 10^9$ лет. Таким образом, *условия на Земле, когда мог нормально происходить процесс распада, исчисляются несколькими миллиардами лет.* Возможно, что миллиарды лет назад материя, из которой теперь состоит Земля, находилась в совершенно иных условиях, когда из более простых атомов и других частиц создавались радиоактивные атомы.

Вопрос о том, как произошла Земля, изучает астрономическая наука *космогония*. Многое в вопросе о происхождении Земли впервые стало ясно благодаря недавним глубоким исследованиям академика О. Ю. Шмидта и других советских ученых *).

Натуральные логарифмы

В формулы решения поставленных задач входит показательная функция с основанием e. При вычислениях по этим

*) См. О. Ю. Шмидт, Четыре лекции о происхождении Земли, Изд-во Академии наук СССР, 1950.

формулам с помощью таблиц логарифмов можно избежать лишних действий, если брать *логарифмы при основании e*. Так, логарифмируя формулу (27) при основании e и при основании 10, получаем:

$$\log_e m_t = -kt + \log_e m_0,$$

$$\lg m_t = -kt \lg e + \lg m_0.$$

Во втором случае требуется лишнее логарифмирование и лишнее умножение по сравнению с первым случаем. Кроме того, задачи приводят к формулам, в которых участвуют логарифмы с основанием e, как мы видели в примерах 5 и 6. Число e часто появляется и в других вопросах математики, и использование логарифмов с основанием e очень удобно, особенно в теоретических вопросах. *Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами и обозначаются символом* ln: выражение $\ln x$ означает то же, что и $\log_e x$. Десятичные и натуральные логарифмы связаны соотношением

$$\log_{10} x = M \cdot \ln x,$$

где

$$M = \log_{10} e \approx 0{,}4343.$$

Это соотношение без труда получается при логарифмировании с основанием 10 тождества

$$e^{\ln x} = x.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Задача о малых колебаниях маятника

Пусть в точке C укреплена нить длины l, на другом конце которой подвешено тело M (маятник). Задача заключается в том, чтобы выяснить, как будет двигаться тело M. Для математического решения этой задачи мы примем некоторые упрощения. Прежде всего, нить, на которой подвешен маятник M, будем считать *нерастяжимой* и *невесомой*.

Рассмотрим движение маятника M в одной вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса. Нерастяжимость нити позволит нам утверждать, что движение тела M будет происходить по окружности радиуса l с центром в точке C. Предположение о невесомости нити означает, что вес нити ничтожен по сравнению с весом тела M; это позволит считать, что внешние силы воздействуют только на тело M. Маятник M мы будем считать тяжелой точкой (т. е. предположим, что он обладает некоторой массой m, а его размерами пренебрежем). Из сил, действующих на тело M, будем учитывать, кроме силы натяжения нити, еще силу тяжести. Силой сопротивления воздуха при рассмотрении этой задачи также можно пренебречь (например, можно предположить, что маятник помещен в закрытый сосуд, из которого выкачан воздух; вопрос о том, насколько движение маятника в воздухе отличается от его движения в пустоте, рассматривается в замечании на стр. 49).

Пусть тело M расположено в некоторый момент времени в точке A окружности, по которой оно движется. Нижнюю точку окружности обозначим через Q, длину дуги QA — через s, а величину соответствующего ей центрального угла $\angle QCA$ в радианах (черт. 4) — через α. Тогда

$$s = l\alpha, \tag{28}$$

При этом дугу s и угол α мы будем считать положительными, если точка A находится правее точки Q, и отрицательными в противном случае.

Перейдем к выводу уравнения, из которого мы найдем закон движения маятника. Точка A находится выше точки Q на отрезок $h = QB$, который равен:

$$h = CQ - CB = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) = l \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому, считая, что потенциальная энергия маятника, находящегося в положении Q, равна нулю, мы найдем для потенциальной энергии маятника, находящегося в точке A, значение

$$W^{(\text{п})} = mgh = mg \cdot 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

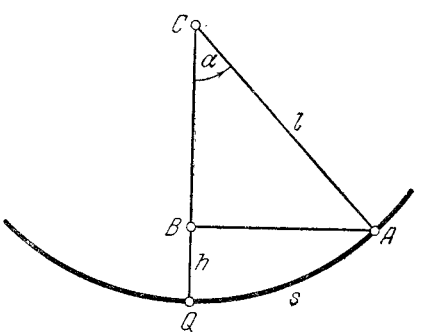
Кинетическая энергия маятника имеет значение:

$$W^{(\text{к})} = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость движения тела M. Таким образом, полная энергия E маятника (находящегося в точке A), выражается формулой:

$$E = \frac{mv^2}{2} + 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (29)$$

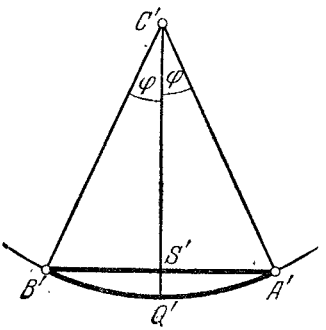
Так как маятник при своем движении не производит никакой работы (мы пренебрегли силами трения и силой сопротивления воздуха!), то его энергия остается все время одной и той же, т. е. величина E постоянна.



Черт. 4.

Мы несколько упростим уравнение (29). Именно, будем рассматривать только задачу о *малых колебаниях маятника*, т. е. о таком движении маятника, когда он отклоняется от положения равновесия Q на небольшие углы. Поясним, что следует понимать под словами «небольшие углы». Дело в том, что точное решение уравнения (29) невозможно

записать никакими известными действиями. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли заменить уравнение (29) более простым? Конечно, это упрощение должно быть таким, чтобы решение упрощенного уравнения с большой степенью точности представляло и решение уравнения (29). Заметим, что никакой *принципиальной* неточности мы этим упрощением не вносим: ведь соотношение (29) уже является приближенным *), так что вопрос о пригодности того или иного упрощения зависит только от той степени приближения к действительности, которую нам нужно получить.



Черт. 5.

Обычное упрощение, которое производят в уравнении (29), заключается в том, что $\sin\varphi$ просто заменяют через φ. То, что при *малых* углах φ подобная замена допустима, видно из черт. 5, на котором изображена дуга $A'Q'B'$ окружности радиуса $C'Q' = 1$; по обе стороны радиуса $C'Q'$ отложен угол φ. Длина отрезка $A'B'$ равна $2\sin\varphi$ (ибо $A'S'$ есть линия синуса), а длина дуги $A'B'$ равна 2φ (конечно, имеется в виду измерение углов в радианной мере!). Но из чертежа ясно, что при небольших углах φ эти величины мало отличаются друг от друга, и тем меньше, чем меньше φ. Например, легко проверить по таблицам тригонометрических функций, что при углах, не превосходящих 0,245 радиана (т. е. $\approx 14°$), отношение $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ отличается от 1 меньше, чем на 0,01; при углах же, меньших 1° (0,017 радиана), это отношение отличается от единицы примерно на 0,0005.

---

*) При выводе уравнения (29) мы приняли ряд упрощений: пренебрегли силой сопротивления воздуха, весом нити, размерами тела M и т. д.

Заметим, что вообще всякий физический закон, всякое математическое соотношение между физическими величинами (например, соотношения (1), (2), (3), (4), (5), (25), (29)) является приближенным, так как в действительности всегда существуют «силы», которые не были учтены при выводе физического закона или математического соотношения. Все это, конечно, нисколько не уменьшает огромного значения физических законов. Например, закон Ома или второй закон Ньютона выполняются при обычных условиях с огромной степенью точности.

Итак, считая отклонения маятника малыми, заменим $\sin\frac{\alpha}{2}$ через $\frac{\alpha}{2}$, т. е. заменим уравнение (29) новым уравнением, «мало отличающимся» от прежнего:

$$\frac{mv^2}{2}+2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=E.$$

Учитывая (28), мы можем записать это соотношение в виде

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mgs^2}{2l}=E,$$

или

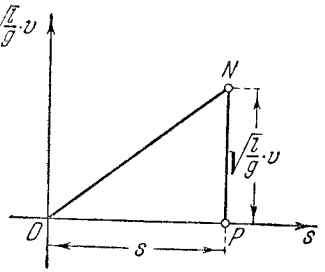
$$\frac{l}{g}v^2+s^2=\frac{2lE}{mg}. \qquad (30)$$

В это уравнение входят две неизвестные переменные величины: s и v (постоянные g, l, m, E мы считаем известными). Однако это уравнение (как и уравнение (5)) можно решить, так как величины s и v — не произвольны, а связаны соотношением (20). Из (20) следует, что уравнение (30) можно записать в виде

$$\frac{l}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+s^2=\frac{2lE}{mg}, \qquad (31)$$

так что это есть, в действительности, уравнение с *одной* неизвестной. Перейдем к решению этого уравнения.

Выберем на плоскости систему координат и будем откладывать по оси абсцисс величину s, а по оси ординат величину $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$. Для любого момента времени t телу M соответствуют определенные величины пути s и скорости v, т. е. определенная точка N на плоскости (черт. 6). Обратно, зная, где находится точка N, мы сможем найти ее координаты s и $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$, т. е. можем узнать положение маятника и его скорость. Таким образом, в каждый момент времени t маятник M условно изображается некоторой точкой N. Длина



Черт. 6.

отрезка ON легко вычисляется по теореме Пифагора:

$$ON = \sqrt{PN^2 + OP^2} = \sqrt{\frac{l}{g} v^2 + s^2},$$

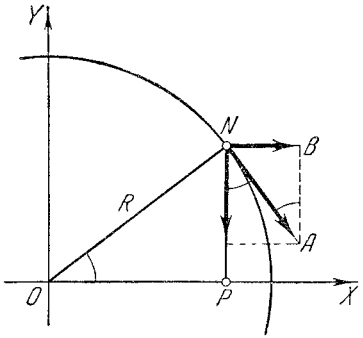
т. е. (в силу соотношения (30))

$$ON = \sqrt{\frac{2lE}{mg}}.$$

При движении маятника величины s и v будут меняться, т. е. точка N будет двигаться по плоскости, в которой взята система координат. Но расстояние точки N от начала координат будет все время одно и то же, т. е. будет равно $\sqrt{\frac{2lE}{mg}}$. Таким образом, точка N будет двигаться по окружности радиуса

$$R = \sqrt{\frac{2lE}{mg}}. \tag{32}$$

Эта окружность называется *фазовой окружностью*.



Черт. 7.

Найдем скорость движения точки N по окружности. Эта скорость направлена по касательной к окружности; пусть, например, она изображается вектором NA (черт. 7). Разложим вектор NA на горизонтальную и вертикальную составляющие. Тогда горизонтальная составляющая NB представит собой скорость перемещения точки P по оси абсцисс. Так как расстояние точки P от O равно s, то скорость движения точки P равна $\frac{ds}{dt} = v$, т. е. $NB = v$. Теперь из подобия треугольников ONP и NAB имеем:

$$PN : ON = NB : NA \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{l}{g}} v : R = v : NA.$$

Из последней пропорции находим:

$$NA = R\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Такова скорость движения точки N по окружности.

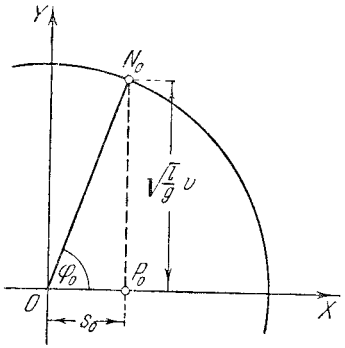
Обозначим через s_0 и v_0 отклонение и скорость маятника в начальный момент, а через N_0 — соответствующую точку на фазовой окружности. Тогда радиус фазовой окружности имеет следующее значение:

$$R = \sqrt{\frac{l}{g} v_0^2 + s_0^2} \tag{33}$$

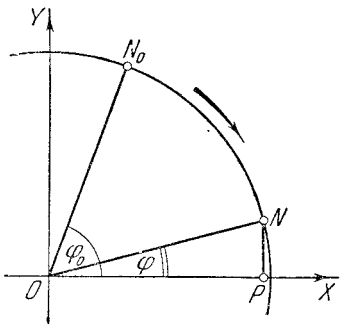
(см. (30), (32)), а угол $\varphi_0 = \angle XON_0$ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot v_0}{s_0} \tag{34}$$

(черт. 8). Далее, через t секунд после начала движения маятника точка N, движущаяся со скоростью $R\sqrt{\frac{g}{l}}$, пройдет



Черт. 8.



Черт. 9.

по фазовой окружности расстояние $N_0N = R\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, и потому угол $\angle N_0ON$ будет равен $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$. Таким образом (черт. 9),

$$\varphi = \angle XON = \angle XON_0 - \angle N_0ON = \varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Отсюда мы получаем:

$$OP = R\cos\varphi = R\cos\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right),$$

$$PN = R\sin\varphi = R\sin\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) = -R\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right).$$

Наконец, вспомнив, что $OP = s$ и $PN = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v$, получаем отсюда

$$\left.\begin{aligned} s &= R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right), \\ v &= -\sqrt{\frac{g}{l}}\, R\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Эти формулы выражают отклонение и скорость маятника через t секунд после начала движения, т. е. полностью решают задачу о движении маятника (при наших упрощениях). Рассмотрим примеры.

Пример 7. В начальный момент маятник отклонен вправо на расстояние s_0 и отпущен без начальной скорости. Найти его отклонение и скорость в момент времени t.

Решение. В этом случае $R = s_0$, $\varphi_0 = 0$, и формулы (35) дают нам:

$$s = s_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$v = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, s_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Пример 8. В начальный момент маятник находился в положении равновесия Q и был выведен из положения равновесия толчком, сообщившим ему начальную скорость v_0, направленную вправо (т. е. положительную скорость). Найти его отклонение и скорость в момент времени t.

Решение. В этом случае из формул (33) и (34) находим, что $R = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, и формулы (35) дают нам:

$$s = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$v = -v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Пример 9. Найдем производные функций $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Так как v есть производная от s по времени t, то сравнивая значения для s и v в примере 8, мы заключаем, что

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = v_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Аналогично из примера 7 находим:

$$\frac{d}{dt}\left(s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

В частности, полагая $v_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $s_0 = 1$ и обозначая величину $\sqrt{\frac{g}{l}}$ через ω, мы получаем из этих формул:

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t. \tag{36}$$

Пример 10. Так как косинус и синус являются функциями периодическими, то через некоторый промежуток времени T, называемый *периодом колебания*, маятник снова придет в начальное положение и снова будет совершать такое же движение. Найдём период колебания маятника.

Решение. Изменение аргумента на 2π не меняет значений синуса и косинуса. Поэтому периодом колебания маятника будет такой промежуток времени T, по истечении которого выражение, стоящее в равенствах (35) под знаками синуса и косинуса, увеличится на 2π. Иначе говоря, значения выражения $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0$ в моменты времени t и $t+T$ должны отличаться друг от друга на 2π:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t+T) - \varphi_0 = \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right) + 2\pi.$$

Из этого соотношения мы без труда находим T:

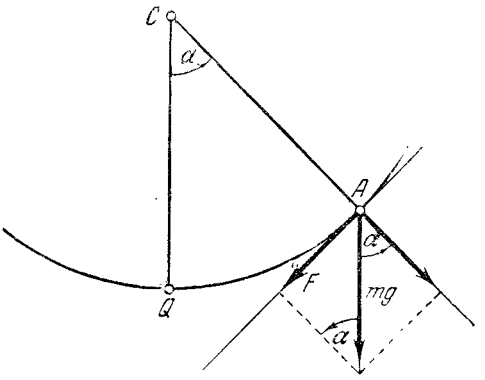
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{37}$$

Таким образом, движение периодически повторяется через каждые T секунд. Маятник совершает *периодическое колебание*. В течение каждого периода (т. е. промежутка времени, равного T) маятник, как видно из (35), один раз попадает в крайнее правое положение (косинус становится равным $+1$) и один раз — в крайнее левое (косинус равен -1). В эти моменты наибольшего отклонения маятника скорость его равна нулю [см. (35); когда косинус принимает значение ± 1, синус этого же аргумента обращается в нуль]. Наибольшую скорость движения (синус принимает значение ± 1) маятник имеет при прохождении через точку Q (косинус обращается в нуль).

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Мы вывели формулы, определяющие движение маятника, из уравнения (30), или, что то же самое, из дифференциального уравнения (31). Существует другое дифференциальное уравнение, также описывающее рассмотренное нами движение маятника. Вывод его очень прост.

Пусть тело M расположено в некоторый момент времени в точке A окружности, по которой оно движется. Силу тя-



Черт. 10.

жести (которую мы считаем равной mg и действующей вертикально вниз) разложим, пользуясь правилом параллелограмма, на две составляющие: по касательной к окружности в точке A и по направлению, перпендикулярному к касательной. Составляющая, перпендикулярная к касательной, стремится растянуть нить и уравновешивается силой натяжения нити (так как нить предположена нерастяжимой). Сила же F, действующая по касательной, по величине равна, как нетрудно видеть, $mg \sin \alpha$ и направлена к точке Q (черт. 10), т. е. при положительном α сила F отрицательна, и наоборот. Таким образом,

$$F = -mg \sin \alpha.$$

Если отбросить уравновешивающие друг друга силу натяжения нити и перпендикулярную к касательной составляющую силы тяжести, то F будет единственной силой, действующей

на тело M (силой сопротивления воздуха мы пренебрегли), и потому мы можем написать на основании второго закона Ньютона

$$ma = -mg \sin \alpha,$$

или

$$a = -g \sin \alpha.$$

Вспомнив теперь, что мы интересуемся исследованием только *малых колебаний* маятника, благодаря чему можно $\sin \alpha$ приближенно заменить через α, мы сможем это уравнение записать в виде

$$a = -g\alpha,$$

или согласно (28)

$$a + \frac{g}{l} s = 0. \tag{38}$$

Это и есть нужное нам уравнение. Покажем, как его можно записать в виде *дифференциального уравнения*. Из соотношений $a = \frac{dv}{dt}$ и $v = \frac{ds}{dt}$ следует, что если мы от пути s один раз возьмем производную, а затем от полученной величины (т. е. от скорости) второй раз возьмем производную, то получим ускорение. Иначе говоря, ускорение есть *вторая производная* от пути s (по времени t). Записывается это следующим образом:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

или

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{39}$$

Символ $\frac{d^2s}{dt^2}$ (вторая производная от s по t) рассматривается не как алгебраическое выражение, а как единый знак; никаких действий (в частности, сокращения этой «дроби») мы делать не можем. Из (39) следует, что уравнение (38) может быть следующим образом записано в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l} s = 0. \tag{40}$$

Заметим, что мы *уже умеем решать* это уравнение. Действительно, оно определяет закон изменения величины s, т. е. закон колебаний маятника, а движение маятника нами уже изучено. Поэтому мы можем сразу сказать, что решение

уравнения (40) дается первой формулой (35). Более полно мы выразим это следующим образом. *Дифференциальное уравнение* (40) *имеет решение*

$$s = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0\right),$$

где R *и* φ_0 *определяются формулами* (33), (34). Заметим, что для нахождения величин R и φ_0 мы должны знать начальное отклонение s_0 и начальную скорость v_0, т. е. значения величин s и $\frac{ds}{dt}$ в начальный момент времени.

Обозначим величину $\sqrt{\frac{g}{l}}$ через ω. Тогда высказанное утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \qquad (41)$$

имеет решение

$$s = R\cos(\omega t - \varphi_0), \qquad (42)$$

где R *и* φ_0 *зависят от значений величин* s *и* $\frac{ds}{dt}$ *в начальный момент времени.*

Уравнение (41) называется *уравнением гармонических колебаний*. О всякой величине, описываемой таким уравнением, говорят, что она совершает гармонические колебания; это означает, что с течением времени рассматриваемая величина меняется по закону (42). Величина ω, входящая в дифференциальное уравнение (41) и в его решение (42), называется *частотой колебаний*, а величина $T = \frac{2\pi}{\omega}$ называется *периодом колебаний*. Если величина s совершает гармонические колебания, то через каждые T секунд ее значения снова и снова повторяются (см. пример 10).

Сравним дифференциальные уравнения (23) и (41). В уравнение (23) входит только первая производная, поэтому оно называется *уравнением первого порядка*. Уравнение (41) есть *дифференциальное уравнение второго порядка*, так как в него входит вторая производная. Обратим внимание на то, что для решения уравнения первого порядка (23) нужно было знать лишь значение самой величины v в начальный момент. Для решения же уравнения второго порядка (41) нужно знать значение в начальный момент не только самой величины s,

но и значение ее производной $\frac{ds}{dt}$. Короче говоря, для решения уравнения первого порядка нужно знать начальное значение одной величины; для решения уравнения второго порядка — начальные значения двух величин.

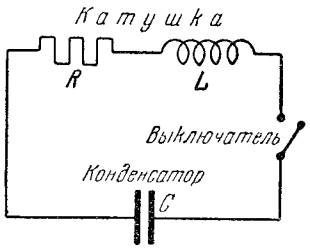
Заметим, что решение уравнения (40) мы получили из физических соображений: оба уравнения, (31) и (40), описывают одно и то же физическое явление, и потому они должны иметь одни и те же решения, выражающие закон движения маятника. Конечно, такое рассуждение является лишь догадкой, а не строгим математическим доказательством. Можно доказать чисто математически, что уравнения (31) и (40) равносильны, т. е. имеют одни и те же решения: если продифференцировать обе части уравнения (31), то мы получим уравнение (40). Обратно, из уравнения (40) можно получить уравнение (31), но для этого нужно воспользоваться действием, обратным действию дифференцирования. Такое действие (называемое *интегрированием*) составляет вместе с дифференцированием основу всей высшей математики. Дать более подробные пояснения в рамках этой небольшой книжки было бы довольно трудно.

Впрочем, пользуясь формулами (36), читатель легко может найти вторую производную функции (42) и убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению (41).

Рассмотрим два примера из физики, приводящих к уравнению гармонических колебаний.

Колебательный контур

Рассмотрим колебательный контур, т. е. замкнутую электрическую цепь, состоящую из катушки и конденсатора. Катушка имеет некоторую *индуктивность* (см. стр. 28) и некоторое *сопротивление*. Вся цепь может быть изображена в виде следующей схемы (черт. 11). Обозначим через q количество электричества, перешедшее с одной пластины конденсатора на другую, а через i — силу тока в цепи. (Мы считаем, что первоначально на конденсаторе был какой-либо заряд q_0, а в катушке — ток i_0, и интересуемся дальнейшим изменением этих величин.) Тогда падение напряжения на конденсаторе равно $\frac{q}{C}$, где C — его емкость; падение напряжения на катушке равно $Lw + Ri$,



Черт. 11.

где R — сопротивление, а L — индуктивность (см. (25)). Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжения вдоль контура равна нулю, т. е.

$$Lw + Ri + \frac{q}{C} = 0. \tag{43}$$

Величина i есть производная от q по t. Действительно, если количество электричества q имело в моменты времени t и $t+h$ значения q_t и q_{t+h}, то за этот промежуток времени через поперечное сечение провода (в любом месте контура) прошло количество электричества, равное $q_{t+h} - q_t$. Поэтому средняя сила тока за промежуток времени между t и $t+h$ равна

$$i_{\text{ср}} = \frac{q_{t+h} - q_t}{h}.$$

Отсюда, переходя к пределу, мы и получаем

$$i = \lim_{h \to 0} \frac{q_{t+h} - q_t}{h} = \frac{dq}{dt}.$$

Из соотношений $i = \frac{dq}{dt}$, $w = \frac{di}{dt}$ следует, что w есть производная от $i = \frac{dq}{dt}$, т. е. w есть вторая производная от q:

$$w = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Таким образом, уравнение (43) можно переписать в виде:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{44}$$

Полученное дифференциальное уравнение является более сложным, чем уравнение (41), так как в нем кроме неизвестной функции q и ее второй производной $\frac{d^2q}{dt^2}$ имеется еще первая производная $\frac{dq}{dt}$. Мы не будем, однако, заниматься решением уравнения (44) (см. замечание на стр. 49), а рассмотрим лишь случай, когда сопротивление R катушки очень мало (по сравнению с величинами L и C), и пренебрежем поэтому членом $R\frac{dq}{dt}$ в уравнении (44). Тогда это уравнение примет вид:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0,$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \qquad (45)$$

Уравнение (45) есть, очевидно, уравнение гармонических колебаний (см. (41)), причем частота ω этих колебаний в рассматриваемом контуре равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а период колебаний выражается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Решение уравнения (45) имеет вид (см. (42)):

$$q = R\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \varphi_0\right),$$

где R и φ_0 зависят от начальных значений, т. е. от q_0 и i_0.

Колебания под действием упругой силы пружины

Пусть на пружине подвешен груз массы m. Под действием силы тяжести пружина немного растянется (до тех пор, пока сила натяжения пружины уравновесит силу тяжести); в таком положении груз и пружина могут быть неподвижными (находиться в равновесии). Если мы выведем груз из положения равновесия, оттянув его вниз, то сила натяжения пружины будет больше силы тяжести, и их равнодействующая будет направлена вверх. Если же мы переместим груз в точку, находящуюся выше положения равновесия, то равнодействующая будет направлена вниз. Таким образом, эта равнодействующая «стремится» возвратить груз в положение равновесия.

Мы ограничимся для простоты рассмотрением движения груза только по вертикальной прямой: вверх — вниз. Обозначим через O положение равновесия, через A положение груза в некоторый момент времени, а через s расстояние OA. При этом за положительное направление на вертикальной прямой примем направление вниз от точки O, т. е. s будем считать положительным, если груз (точка A) расположен ниже точки O, и отрицательным, если он выше точки O. Обозначим через F равнодействующую силы тяжести и силы натяжения пружины, а через S силу сопротивления воздуха.

Мы будем считать, что на груз не действуют никакие другие силы, кроме F и S. Согласно второму закону Ньютона мы можем написать:

$$ma = F + S,$$

где a — ускорение груза. Сила F, стремящаяся возвратить груз в положение равновесия, становится тем больше, чем больше отклонение s груза от положения равновесия. Мы примем, что сила F прямо пропорциональна отклонению s, т. е. равна по величине ks, где k — коэффициент пропорциональности. Это предположение хорошо оправдывается на опыте (при не очень больших отклонениях от положения равновесия). Величина k называется *жесткостью пружины*. Если s положительно (точка A расположена ниже O), то сила F направлена вверх, т. е. отрицательна; если же s отрицательно, то сила F положительна. Иначе говоря, сила F имеет знак, противоположный знаку отклонения s, т. е.

$$F = -ks.$$

Для силы S примем то же значение, что и выше (см. (3)), т. е.

$$S = -bv.$$

Таким образом, мы получаем следующее уравнение движения груза:

$$ma = -ks - bv,$$

или

$$ma + bv + ks = 0. \tag{46}$$

Так как $v = \frac{ds}{dt}$ и $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, то это уравнение может быть записано в виде

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = 0. \tag{47}$$

Дифференциальное уравнение (47) аналогично дифференциальному уравнению (44), полученному при решении задачи о колебательном контуре. Мы не будем решать уравнение (47) (см. замечание на стр. 49), а рассмотрим лишь случай, когда можно пренебречь величиной силы сопротивления воздуха (т. е. когда величина b очень мала по сравнению с величинами m и k). Тогда уравнение (47) примет вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0. \tag{48}$$

Соотношение (48) представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Решение уравнения (48) согласно (42) имеет вид:

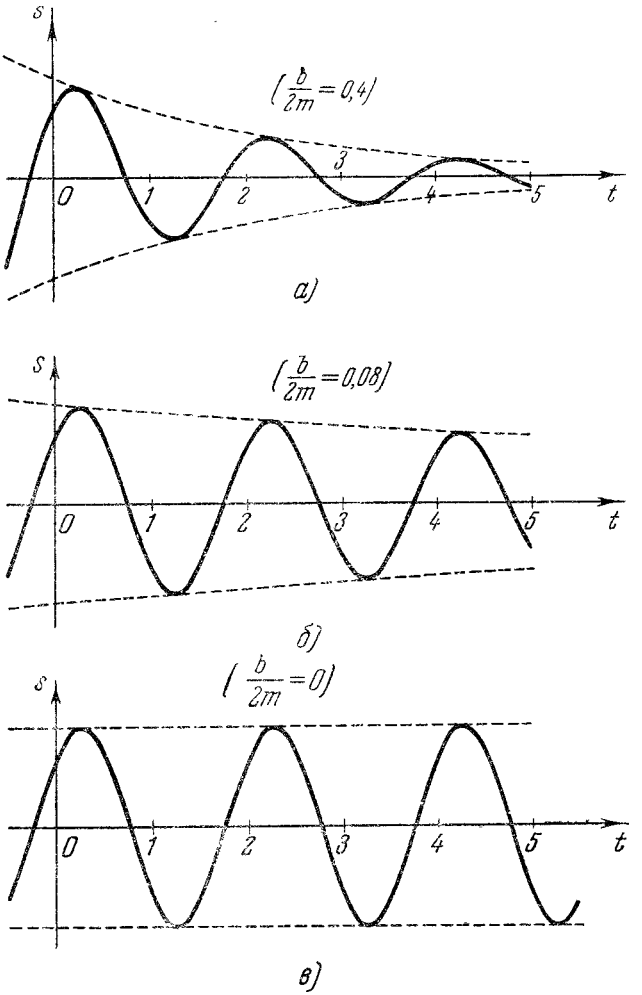
$$s = R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi_0\right), \tag{49}$$

где R и φ_0 зависят от начальных условий, т. е. от s_0 и v_0.

Замечание. Для того чтобы получить уравнение гармонических колебаний, мы при изучении колебаний маятника и колебаний груза на пружине пренебрегали силами трения и сопротивления воздуха, а при рассмотрении контура пренебрегали его сопротивлением. Физически это означает, что при наших предположениях не происходит никакого расходования энергии; математически это сказалось в том, что в дифференциальном уравнении был отброшен член, содержащий первую производную. В результате мы получили гармонические колебания, т. е. колебания, все время одинаково повторяющиеся, *незатухающие*.

Что было бы, если бы мы при решении рассмотренных выше задач учли силу сопротивления воздуха или падение напряжения на сопротивлении? Например, чем отличаются решения уравнения (44) от решений уравнения (45)? Математический расчет (мы не будем его здесь приводить) показывает, что и уравнение (44) описывает колебательный процесс, если R не слишком велико. Однако колебания, описываемые уравнением (44), с течением времени ослабевают; поэтому их называют *затухающими колебаниями*. Физически это объясняется тем, что энергия колебаний все время уменьшается, переходя в тепловую энергию, так как при прохождении тока через сопротивление R выделяется тепло. Точно так же колебания маятника постепенно ослабевают, затухают, так как вследствие трения и сопротивления воздуха энергия маятника постепенно расходуется на нагревание самого маятника и окружающего воздуха. Однако если сопротивление невелико, то в течение небольшого промежутка времени (например, нескольких периодов) затухающие

колебания мало отличаются от незатухающих (гармонических) колебаний. Затухание сказывается лишь после достаточно большого промежутка времени. Если, например, тяжелую



Черт. 12.

гирю подвесить на веревке и слегка вывести из положения равновесия, то после 10—15 периодов уменьшение размаха колебаний будет очень незначительным и незаметным для

нашего глаза. Мы обнаружим это только через несколько минут после начала колебаний.

Для сравнения приведем (без вывода) точное решение уравнения (47). Будем считать, что значение коэффициента b в выражении для силы сопротивления воздуха не очень велико (а именно, $b < 2\sqrt{mk}$). Тогда решение уравнения (47) имеет вид:

$$s = Re^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\,t - \varphi_0\right), \qquad (50)$$

где R и φ_0 определяются начальными условиями. Из этой формулы видно, что s неограниченно убывает с течением времени (множитель $e^{-\frac{b}{2m}t}$ становится все меньше и меньше при увеличении t). На черт. 12, *а*, *б* приведены графики функций (50) для различных значений коэффициента $\frac{b}{2m}$. Чем меньше $\frac{b}{2m}$, тем медленнее происходит затухание колебаний. Сравните эти чертежи с графиком гармонических колебаний (49), приведенным на черт. 12, *в* (формула (50) совпадает с формулой (49) при $\frac{b}{2m} = 0$).

Заметим еще, что при больших значениях коэффициента b (при $b > 2\sqrt{mk}$) формула (50) заменяется другой. В этом случае груз не более одного раза пройдет через положение равновесия и затем будет медленно приближаться к этому положению, находясь все время по одну сторону (ниже или выше) от него.

НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Наибольшие и наименьшие значения

Рассмотрим некоторую переменную величину y, значения которой зависят от другой величины x. Когда говорят, что y зависит от x, или, иначе, y есть *функция* величины x, то под этим подразумевают, что каждому значению x соответствует вполне определенное значение y. Например, площадь круга есть функция его радиуса, т. е. площадь круга зависит от величины радиуса. Синус, косинус, тангенс и т. д. зависят от величины угла, т. е. являются функциями угла; эти функции называются тригонометрическими.

Итак, пусть y есть функция величины x. Поставим следующую задачу: найти такое значение для x, при котором y принимает *наибольшее значение*. Прежде чем решать эту задачу, введем важное понятие *области определения функции*. Мы рассмотрим это понятие на примерах.

В качестве первого примера возьмем следующую функцию. Пусть V есть объем одного килограмма воды при нормальном атмосферном давлении и температуре $t°$ (по Цельсию). Тогда V зависит от t, т. е. V есть функция величины t. Очевидно, что эта функция задана лишь для значений t, заключенных между 0 и 100°. Ведь при нормальном атмосферном давлении вода не может иметь температуру $t < 0°$ (вода превратится в лед) или $t > 100°$ (вода превратится в пар). Таким образом, функция V определена только для таких значений t, которые удовлетворяют неравенствам: $t \geqslant 0$ и $t \leqslant 100$. Обычно два таких неравенства записывают вместе: $0 \leqslant t \leqslant 100$. Итак, функция V определена только при

$$0 \leqslant t \leqslant 100.$$

Иначе говоря, *область определения* функции V состоит из чисел, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant 100$. Такую область определения называют *числовым отрезком*, так как при изображении чисел на числовой оси все точки, которые соответствуют числам, удовлетворяющим условию $0 \leqslant t \leqslant 100$, заполняют целый отрезок числовой оси. Числа 0 и 100 называются *концами*, или *концевыми точками* числового отрезка $0 \leqslant t \leqslant 100$, а все остальные числа этого отрезка называются его *внутренними значениями*, или *внутренними точками*. *Всякое внутреннее значение* t_0 *обладает тем свойством, что в числовом отрезке имеются и числа, меньшие* t_0, *и числа, большие* t_0. Концы отрезка этим свойством не обладают.

В качестве второго примера рассмотрим силу тока i, протекающего в электрической цепи (изображенной схематически на черт. 3) через t секунд после ее замыкания. Тогда i есть функция времени t. Каким образом i зависит от t, показывает формула, приведенная на стр. 29. Для каких значений t определена функция i? Очевидно, что до момента замыкания цепи, т. е. при $t < 0$, никакого тока в цепи не наблюдалось, и потому имеет смысл рассматривать ток i только при $t \geqslant 0$. Таким образом, *область определения* функции i будет состоять из всех чисел t, удовлетворяющих условию $t \geqslant 0$. Такая область определения (ее можно назвать *числовой полупрямой*) имеет одну концевую точку $t = 0$; остальные ее точки являются внутренними.

Наконец, в качестве третьего примера рассмотрим функцию $y = \sin x$. Она определена при любом значении x, т. е. *областью определения* этой функции является вся числовая прямая. Эта область определения не имеет концевых точек.

Существуют функции, области определения которых очень сложны, но мы будем рассматривать лишь такие функции, для которых областью определения служит числовой отрезок, числовая полупрямая или числовая ось.

Вернемся к поставленной задаче о нахождении наибольшего значения функции. Может ли функция принимать наибольшее значение в концевой точке ее области определения? Конечно, может. В качестве примера возьмем рассмотренную выше функцию V, выражающую объем одного килограмма воды при нормальном давлении и температуре $t°$. Так как объем воды при нагревании увеличивается, то ясно, что наибольшее значение функция V будет иметь при $t = 100°$, т. е. в концевой точке области определения.

Операция дифференцирования позволяет во многих случаях быстро решить вопрос о нахождении наибольшего значения функции. Именно, имеет место следующее предложение.

Пусть y есть функция переменной x. Если эта функция принимает наибольшее значение во внутренней точке $x=a$ ее области определения, то в этой точке производная $\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль *).

Докажем это предложение. Значение y, соответствующее значению x (взятому из области определения функции), будем обозначать через y_x. Мы предположили, что значение y_a, которое принимает функция y при $x=a$, является наибольшим, т. е.

$$y_a \geqslant y_x \tag{51}$$

при любом x (взятом из области определения функции). Производная $\frac{dy}{dx}$ определяется при $x=a$ соотношением

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{при } x=a} = \lim_{h\to 0}\frac{y_{a+h}-y_a}{h}. \tag{52}$$

Докажем, что эта производная равна нулю.

Будем сначала приближать h к нулю, придавая ему *положительные* значения. Так как числитель $y_{a+h}-y_a$ дроби, стоящей под знаком предела, удовлетворяет неравенству $y_{a+h}-y_a \leqslant 0$ (см. (51)), а $h>0$, то и вся дробь, стоящая под знаком предела, неположительна (т. е. либо равна нулю, либо является отрицательным числом). Но тогда и предел этой дроби не может быть положительным, т. е. *производная* (52) *не может быть положительным числом.*

Будем теперь приближать h к нулю, придавая ему *отрицательные* значения. Тогда попрежнему $y_{a+h}-y_a \leqslant 0$ (см. (51)), но $h<0$, и потому дробь, стоящая под знаком предела, неотрицательна. Но тогда и предел этой дроби (т. е. интересующая нас производная) *не может быть отрицательным.*

Итак, значение производной $\frac{dy}{dx}$ при $x=a$ не может быть ни положительным, ни отрицательным, и потому оно равно нулю, что и требовалось доказать.

---

*) При условии, что производная существует. Встречаются такие функции, которые не имеют производной.

В этом доказательстве существенно использовалось то, что a есть *внутренняя* точка области определения функции. Действительно, мы придавали величине h и положительные, и отрицательные значения, так что $a+h$ принимало значения, бо́льшие a, и значения, меньшие a.

Предположим, что a — концевая точка. Тогда в области существования имеются или только значения, бо́льшие a, или только значения, меньшие a, т. е. приведенное доказательство неприменимо.

При рассмотрении вопроса о нахождении *наименьшего* (а не наибольшего) значения функции, можно провести совершенно аналогичные рассуждения. В результате мы докажем, что если функция принимает наименьшее значение во внутренней точке ее области определения, то в этой точке производная функции обращается в нуль. Объединяя случаи наибольшего и наименьшего значения вместе, получаем следующую теорему, принадлежащую Ферма *).

Теорема. *Если функция принимает наибольшее* (или *наименьшее*) *значение во внутренней точке области определения, то в этой точке производная функции обращается в нуль.*

На этой теореме и основано нахождение наибольших и наименьших значений при помощи дифференцирования. Мы должны найти производную рассматриваемой функции и те внутренние значения области определения, в которых производная обращается в нуль. Точку, где функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение, следует искать или среди этих точек (в которых производная обращается в нуль), или среди концевых точек области определения.

Пример 11. К концам проводника (например, нагревательного прибора) присоединена батарея с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r. Каким должно быть сопротивление проводника, чтобы он получал от батареи наибольшую мощность?

Решение. Обозначим сопротивление проводника через R. Тогда общее сопротивление цепи равно $R+r$, и потому сила тока, идущего в цепи, имеет значение

$$i = \frac{E}{R+r}.$$

Мощность, которую отдает батарея проводнику, выражается

*) Французский математик XVII столетия.

формулой $W = I^2R$, т. е.

$$W = \frac{E^2R}{(R+r)^2}. \tag{53}$$

Следовательно, задача может быть сформулирована так: при каком значении R функция W, определенная формулой (53), принимает наибольшее значение?

Областью определения функции W служит полупрямая $R \geqslant 0$ (так как сопротивление проводника не может быть отрицательным). Найдем производную $\frac{dW}{dR}$:

$$\frac{dW}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{E^2(R+h)}{(R+h+r)^2} - \frac{E^2R}{(R+r)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{E^2[(R+h)(R+r)^2 - R(R+h+r)^2]}{h(R+h+r)^2(R+r)^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{r^2 - R^2 - Rh}{(R+h+r)^2(R+r)^2} = \frac{r^2 - R^2}{(R+r)^4} = \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Для того чтобы производная $\frac{dW}{dR}$, т. е. дробь

$$\frac{r-R}{(R+r)^3},$$

обратилась в нуль, нужно, чтобы ее числитель $r - R$ обратился в нуль, т. е. чтобы было $R = r$.

Итак, мощность W может принимать наибольшее значение либо при $R = r$, либо в концевой точке $R = 0$ области определения. Но при $R = 0$ мощность W тоже равна нулю (это значение не наибольшее, а наименьшее). Поэтому наибольшее значение мощность может иметь лишь при $R = r$, т. е. при условии, что *сопротивление проводника равно внутреннему сопротивлению батареи*.

Будет ли в действительности при $R = r$ наибольшая мощность? Ведь мы доказали лишь то, что мощность *может* принимать наибольшее значение лишь при $R = r$, но это еще не значит, что в действительности так и будет.

Нетрудно убедиться, что при $R = r$ мощность W действительно принимает наибольшее значение. В самом деле, при $R = 0$ мощность W тоже равна нулю, а при очень большом R сила тока I будет очень мала, а значит, и мощность будет мала (так как падение напряжения на концах

проводника не превосходит E). Поэтому ясно, что мощность должна достигнуть наибольшего значения при каком-то (не очень большом) значении сопротивления R. Но так как мощность *должна* принимать наибольшее значение (а *может* она его принимать *только* при $R = r$), то ясно, что при $R = r$ мы действительно получим наибольшее значение мощности.

Пример 12. Нужно изготовить паровой котел цилиндрической формы. При этом котел должен иметь заданный объем V. Желательно, чтобы полная поверхность котла была наименьшей (при этом условии на изготовление котла пойдет наименьшее количество металла; кроме того, чем меньше поверхность котла, тем меньше он будет охлаждаться от соприкосновения с окружающим воздухом). Найти наилучшие размеры котла.

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через R, а его высоту через h. Тогда

$$V = \pi R^2 h,$$

т. е.

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Поверхность цилиндра имеет значение $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$, т. е.

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}. \tag{54}$$

Мы должны узнать, при каком R величина S (зависящая от R, т. е. являющаяся функцией радиуса R) принимает наименьшее значение. Найдем производную $\frac{dS}{dR}$:

$$\frac{dS}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[2\pi (R+h)^2 + \frac{2V}{R+h}\right] - \left[2\pi R^2 + \frac{2V}{R}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\pi (2Rh + h^2) - \frac{2Vh}{R(R+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[4\pi R + 2\pi h - \frac{2V}{R(R+h)}\right] = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}.$$

Приравнивая производную $\frac{dS}{dR}$ нулю, найдем: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ и потому

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

Иначе говоря, *высота цилиндра должна равняться его диаметру*.

Действительно ли при этом значении мы получаем наименьшее значение поверхности цилиндра? Нетрудно убедиться в том, что это будет именно так. В самом деле, при очень больших значениях R поверхность S будет также очень большой (так как большим будет значение первого члена в выражении для S — см. (54)). При очень малых значениях R величина поверхности S также будет очень велика (большим будет второй член). Следовательно, при некотором (не очень большом и не очень малом) значении R величина S должна принимать наименьшее значение. Но так как производная $\frac{dS}{dR}$ обращается в нуль только при одном значении R, то этому значению R и соответствует наименьшая площадь поверхности цилиндра.

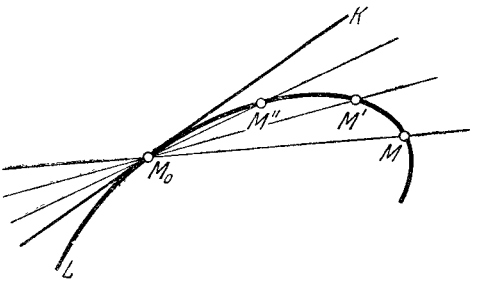
Мы ограничимся этими двумя примерами. При желании читатель найдет много задач подобного рода в учебниках или задачниках. Решение некоторых из этих задач можно порекомендовать читателю при условии, что он не будет пропускать заключительной части рассуждений, т. е. доказательства того, что в найденной точке действительно имеется наибольшее или наименьшее значение. В курсах высшей математики приводятся более совершенные приемы, позволяющие судить о том, действительно ли в найденной точке функция принимает наибольшее или наименьшее значение. Кроме того, имеются *правила вычисления производных*. Так как автор не предполагал, что читателю знакомы эти правила, то производные в приведенных выше примерах были найдены непосредственными вычислениями.

Задача о проведении касательной

Пусть L — некоторая кривая линия, M_0 — ее точка. Рассмотрим вопрос о проведении *касательной* к кривой L в точке M_0. Прежде всего скажем несколько слов о том, как в математике определяют касательную. Выберем точку M, также лежащую на кривой L, и проведем прямую M_0M, которую будем называть *секущей*, так как она пересекает кривую L по крайней мере в двух точках M_0 и M. Если точка M будет двигаться по кривой L, приближаясь к точке M_0 (на черт. 13 отмечены последовательные положения M, M', M'', ... точки M), то секущая M_0M будет поворачиваться вокруг точки M_0. Если при стремлении точки M к M_0 секущая M_0M, поворачиваясь, будет стремиться к некоторой

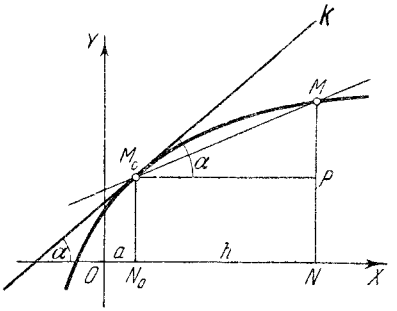
прямой M_0K, то эта предельная прямая M_0K и называется *касательной* к кривой L в точке M_0.

Предположим теперь, что кривая L вычерчена на плоскости, на которой задана система координат, так что каждой точке M



Черт. 13.

кривой L соответствуют ее абсцисса x и ее ордината y. Обозначим абсциссу точки M_0 через a (черт. 14), а длину отрезка N_0N через h. Тогда абсцисса точки M будет равна



Черт. 14.

$a+h$. Ординату точки M_0 обозначим через y_a, а ординату точки M — через y_{a+h}. Отрезок MP имеет длину

$$MP = MN - PN = MN - M_0N_0 = y_{a+h} - y_a,$$

и потому мы имеем:

$$\operatorname{tg} \angle PM_0M = \frac{MP}{M_0P} = \frac{MP}{N_0N} = \frac{y_{a+h} - y_a}{h}. \qquad (55)$$

Обозначим через α угол PM_0K, т. е. угол между осью абсцисс и касательной. Тогда при приближении точки M к M_0, т. е. при стремлении к нулю отрезка $N_0N = h$, угол PM_0M будет приближаться к α, а тангенс угла PM_0M — к $\operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, из соотношения (55) мы в пределе (при $h \to 0$) получаем:

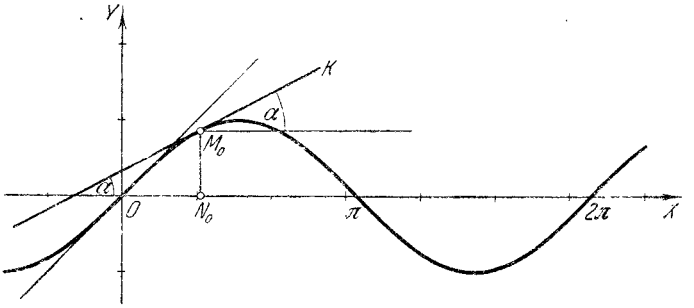
$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{y_{a+h}-y_a}{h} = \frac{dy}{dx}\Big|_{\text{при } x=a}.$$

Итак, *тангенс угла наклона касательной равен значению производной от ординаты y по абсциссе x при $x = a$, где a — абсцисса точки касания.*

Пример 13. Рассмотрим синусоиду (черт. 15), т. е. кривую, абсцисса и ордината которой связаны соотношением

$$y = \sin x.$$

Как провести касательную к этой кривой в некоторой точке M_0 с абсциссой a?



Черт. 15.

Мы уже знаем, как найти тангенс угла наклона этой касательной:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}\Big|_{\text{при } x=a} = \frac{d}{dx}\sin x\Big|_{\text{при } x=a} = \cos a$$

(см. (36)). Таким образом, для проведения касательной мы должны найти $\cos a$ (что очень легко, так как отрезок $M_0N_0 = y = \sin a$ нам известен) и провести прямую M_0K так, чтобы $\operatorname{tg}\alpha = \cos a$. Например, при $a = 0$ мы получаем: $\operatorname{tg}\alpha = \cos 0 = 1$, т. е. *касательная, проведенная к сину-*

сонде в начале координат, составляет с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{4}$. При $a = \frac{\pi}{3}$ мы имеем: $\operatorname{tg} \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, откуда по таблицам находим, что угол α, который составляет касательная с осью абсцисс, приближенно равен $26^\circ 34'$.

Моделирование

Мы видели, что разные физические явления, на первый взгляд не имеющие ничего общего, могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Так было с падением тела в сопротивляющейся среде, включением тока и радиоактивным распадом. Так было с тремя задачами, приводящими к гармоническим колебаниям. Но если два явления описываются одним и тем же уравнением, то решение этого уравнения описывает и то и другое явление. Иначе говоря, явления будут протекать одинаково (т. е. значения соответствующих физических величин будут меняться одинаково). Поэтому, например, электромагнитные колебания в контуре мы можем изучать, наблюдая колебания маятника, и наоборот. Это очень простое замечание оказывается чрезвычайно важным.

Допустим, что мы имеем проект сложной машины и хотим проверить, правильно ли ее рассчитали. Строить машину долго и дорого, а необходимо быть заранее уверенным в правильности проекта. Составим уравнения движения машины (эти уравнения обычно бывают дифференциальными). Если мы решим эти уравнения, то, конечно, узнаем, как будет работать машина и правильно ли она рассчитана. Но часто бывает проще сделать следующее. Построим другой прибор (например, соберем электрическую цепь), который описывался бы точно такими же дифференциальными уравнениями, что и проект машины. Если это удастся, то достаточно исследовать поведение построенного прибора, и мы узнаем, как будет работать конструируемая машина. Этот прибор является, таким образом, *моделью* машины. Подобное «моделирование» также основано на применении понятия производной, так как для построения правильной модели нужно знать дифференциальные уравнения, которыми описывается работа изучаемой машины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятия производной, дифференциального уравнения находят чрезвычайно широкие применения в математике, физике, астрономии, технике. Изучением свойств и применений этих понятий занимается так называемая «высшая математика». К сожалению, в рамках этой небольшой книги было бы трудно разъяснить идеи, лежащие в основе определения операции *интегрирования* *), которая является, в известном смысле, обратной к операции дифференцирования и служит вместе с ней фундаментом всей высшей математики.

Хочется остановить внимание читателя на том, что понятия высшей математики, в частности, понятие производной, которому посвящена эта книга, не оторваны от жизни, а являются *математическим отражением происходящих в природе процессов* (в частности, скорости механического движения). Исторически эти понятия и развились из тех задач, которые были поставлены жизнью — в первую очередь из потребностей *механики* (задача нахождения скорости движения) и *геометрии* (задача о проведении касательной). Ф. Энгельс писал: «Как и прочие науки, математика возникла из потребностей человека». Это высказывание в полной мере относится и к высшей математике. Созданное в связи с изучением *движения* тел, *изменения* величин, понятие производной само отражает это движение, ибо относится к *переменной величине*. «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика*, и благодаря этому же *стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, зачатки которого вскоре были заложены и кото-

*) См. книгу И. П. Натансона «Суммирование бесконечно малых величин», изданную в этой же серии (выпуск 12).

рое было в целом завершено, а не открыто, Ньютоном и Лейбницем» (Энгельс).

Итак, понятия высшей математики возникли из потребностей человека в первую очередь в связи с изучением механического движения тел. Но в природе существует не только механическая форма движения. Всё новые законы физики открываются исследователям, и перед математикой встают задачи описания недавно открытых явлений и форм движения. Созданные в последнее время физические теории (теория относительности, квантовая физика, теория ядра) требуют развития нового математического аппарата. Рождение некоторых математических наук произошло уже в самые последние десятилетия. *Математика — не оторванная от жизни наука, а наука, связанная с жизнью, развивающаяся вместе с развитием наших знаний о физическом мире.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 3

Задача о падении тела 5

Постановка задачи 5
Качественное решение задачи 8
Формула скорости падения тела. Число e 12

Дифференцирование 24

Понятие производной 24
Дифференциальное уравнение 26
Две задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

а) Включение тока 27
б) Радиоактивный распад 29

Натуральные логарифмы 33

Гармонические колебания 34

Задача о малых колебаниях маятника 34
Дифференциальное уравнение гармонических колебаний . . 42
Колебательный контур 45
Колебания под действием упругой силы пружины 47

Некоторые другие применения понятия производной . . . 52

Наибольшие и наименьшие значения 52
Задача о проведении касательной 58
Моделирование 61

Заключение 62